El método RDF (Risk Dynamics into the Future)

El nuevo estándar de stress testing de riesgo de crédito

Abril 2009

Copyright ©2008 AIS, S.A.. All rights reserved.

RDF, *Risk Dynamics into the future*, es una marca de AIS, S.A en los países en uso.
RDF, como se describe en este documento, es un método de gestión del riesgo de crédito introducido por AIS, S.A.

Segunda edición: Abril 2009
Copyright (c) AIS
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNUFree Documentation License".

© Autores: Ramon Trias Capella, Ferran Carrascosa Mallafrè, David Fernández, Lluïsa Parés, Guillermo Nebot, Javier Norte y Sergi Martínez.

Colaboradores: Cristina Rata, Perla Ibarlucea.

Si desea recibir más información sobre el método y su implantación se puede poner en contacto con:

Ramon Trias
Presidente, Director General
rtrias@ais-int.com

Nausica Trias
Directora General Adjunta
ntrias@ais-int.com

José Manuel Aguirre
Director Comercial
jmanuel.aguirre@ais-int.com

Lluisa Parés
Directora I+D
lluisap@ais-int.com

Ferran Carrascosa
Consultor I+D
ferran.carrascosa@ais-int.com

David Fernández
Consultor
dfernandez@ais-int.com

Eduardo Laguna
Director Oficina México
eduardo.laguna@ais-int.com

Claudio Ugarte
Director Oficina Chile
claudio.ugarte@ais-int.com

Ricardo Morais
Director Oficina Portugal
ricardo.morais@ais-int.com

Esta es la segunda publicación de un conjunto de publicaciones sobre el nuevo método RDF creado por AIS. Cada nueva publicación añadirá un nuevo capítulo a lo publicado hasta el momento, permitiéndose descargarse de la web cada vez el nuevo capítulo.

CAPITULO 2.

ESCENARIOS ECONÓMICOS PARA EL STRESS TESTING

Índice

1 AIS, S.A.

AIS, Aplicaciones de Inteligencia Artificial, S.A. es una multinacional, con más de 20 años de historia, especializada en el desarrollo de sistemas automáticos de ayuda a la toma de decisiones en la empresa, sistemas que permiten tomar la mejor de las decisiones al mínimo coste.

La actividad de AIS confiere a la empresa una triple vertiente: el de consultora, el de diseñadora de herramientas informáticas y el de creadora de modelos estadísticos y de optimización.

Entre sus soluciones destacan: evaluación cuantitativa del riesgo de crédito, aplicación de técnicas cuantitativas en marketing, control de riesgo en el sector asegurador, optimización del corte de papel, monitorización de la producción, previsión de consumo y distribución óptima de energía, dinero y diarios. Además, ofrece consultoría experta en las diferentes áreas.

AIS cuenta con clientes en más de 22 países y delegaciones en Portugal, Argentina, Chile y México.

Las actividades de AIS en el análisis de riesgo de crédito en el sector financiero han sido siempre su "*core business*". Gracias a las nuevas propuestas realizadas por el Comité de Basilea (BIS), sus actividades han cobrado nuevo impulso. De acuerdo con el Nuevo Acuerdo del Capital, aprobado en junio de 2004, la política de control de riesgos llevada a cabo por las entidades financieras está cambiando profundamente para adaptarse a la realidad económica y necesidades del momento presente.

Ramon Trias, presidente y director general de AIS, es uno de los expertos en Basilea II de la compañía. En los últimos años, ha dado más de 20 conferencias sobre el tema por todo el mundo. Bolivia, Colombia, Panamá, República Dominicana, España, México, Chile y Portugal han sido algunos de sus destinos.

Datos de contacto:

AIS - APLICACIONES DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL, S.A.

Domicilio social:
C/ Castillejos, 365, 2ª planta
08025 Barcelona (España)

Correo electrónico:
research@ais-int.com

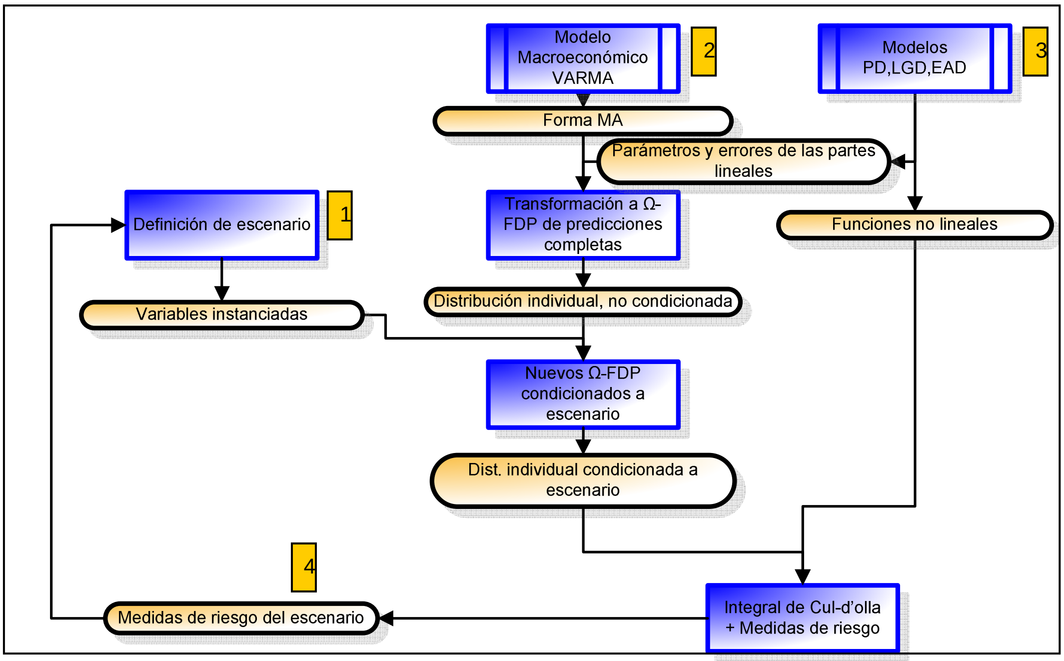
Inscrita en el Registro Mercantil de Barcelona
T.8.675, L.7.917, Secc. 2ª, F.113, H.101882, Inscrip. 1ª

C.I.F. A-58-417759

2 Introducción

AIS ha capitalizado su experiencia en el sector financiero, lanzando al mercado un nuevo método para el cálculo del ***stress testing*** sobre el **capital económico** de riesgo de crédito. Este método llamado **RDF** (*Risk Dynamics into the Future*) pretende convertirse en un nuevo estándar de *stress testing* en el área de la gestión de riesgos.

RDF (*Risk Dynamics into the Future*) es una propuesta metodológica, basada en la modelización econométrica y matemática, que tiene por objetivo calcular las distribuciones de pérdidas de una entidad condicionadas a diferentes escenarios macroeconómicos. El conjunto de módulos que comprende **RDF** se ilustra en el gráfico siguiente:



El usuario de RDF define escenarios macroeconómicos futuros(1). Partiendo de un modelo macroeconómico(2) y unos modelos de pérdidas por riesgo de crédito(3), RDF computa las distribuciones de pérdidas y medidas de riesgo asociadas (VaR, shortfall, …) condicionadas a dichos escenarios(4).

Después del primer artículo publicado por AIS donde se resumía el método RDF, este segundo artículo presenta **los escenarios económicos para el *stress testing* en RDF** en 2 grandes bloques. El primero establece *El concepto de escenarios económicos para el stress testing* en un formato accesible a lectores con conocimientos de riesgo de crédito. El segundo bloque desarrolla la *Formulación matemática de los escenarios económicos para el stress testing* dirigido a un público con conocimientos técnicos en estadística aplicada.

El **primer bloque** se inicia con un recordatorio de los *Principales criterios metodológicos de RDF* y sienta las bases sobre el *Concepto de escenario económico*. A continuación explica *El modelo VARMA como generador de escenarios* y la *Definición de escenarios económicos de estrés* (históricos, hipotéticos o sistemáticos). Termina este bloque con un breve *Resumen*.

El **segundo bloque** se inicia con una *Introducción al modelo VAR*, explica el Modelo reducido VAR (parte estadística del modelo) y su identificación en el *Modelo estructural SVAR* (relaciones económicas causales). A continuación desarrolla la *Proyección del proceso VAR* como una *distribución normal multivariante* a l periodos futuros. Finalmente se formula el uso de *El complemento de Schur* a partir de la distribución normal proyectada.

3 El concepto de escenarios económicos para el *stress testing*

PRINCIPALES CRITERIOS METODOLÓGICOS DE RDF

Los principales **criterios** utilizados en la construcción de **RDF** son:

- Las **fuentes de variabilidad** que originan el riesgo, proceden esencialmente de la situación macroeconómica. Un modelo **econométrico**, llamado **modelo macro**, permite el gobierno de este dominio. Se ha elegido para este método modelos tipo **VARMA** (*Vector Autoregressive Moving Average*).

- Las **empresas** y **particulares** de la cartera crediticia soportarán o no el efecto de las posibles crisis. La modelización de su capacidad de respuesta combinará las **variables macroeconómicas** y las características del **instrumento** y de los **datos específicos** de cada **subcartera,** en los llamados **modelos micro**. El modelo podría desarrollarse a nivel de contrato, aunque el tratamiento de **subcarteras** parece el más indicado.

- Los **modelos micro** que relacionan la situación macroeconómica con las pérdidas en cada subcartera incorporan sus propias variables residuales (errores de los modelos micro). Estas variables aleatorias tendrán la categoría de generadores de riesgo (*Risk drivers*) y se concatenarán en una sola **distribución multivariante** (en este caso como variables independientes) junto con las variables del modelo macroeconómico.

- El **modelo macroeconómico** (**modelo macro**) enriquecido con las variables residuales de los modelos, opcionalmente multiperíodo, se integra en una única **distribución multivariante** de dimensión (número de períodos x número de variables macro y micro). Esta distribución permite el cálculo automático del escenario más probable o escenario no condicionado (sin ninguna hipótesis subjetiva) y controla tanto el efecto indirecto como las interacciones.

- Se entiende como **definición de escenarios** la fijación, por parte del gestor de negocio de algunos valores del escenario hipotético en algunos períodos futuros. El sistema debe ser capaz de calcular la probabilidad de suceso de esta nueva escena y generar la distribución marginal resultante o escenario condicionado.

- Las **medidas de riesgo** utilizan la distribución de pérdidas originada por los modelos **micro** y **macro,** a través de la distribución multivariante indicada.

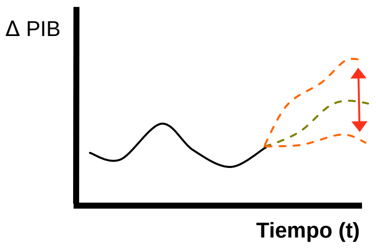
- Se dota al método con una novedosa **solución analítica** para la integración de la función de pérdidas, que complementa a la solución más tradicional de *Montecarlo*.

CONCEPTO DE ESCENARIO ECONÓMICO

Los *escenarios económicos* de estrés son estados posibles del futuro que identifican situaciones extremas de la economía, pero plausibles. Se definen a partir de valores de variables macroeconómicas en un periodo futuro. RDF pretende analizar el impacto de estos escenarios sobre las medidas de riesgo (distribución de pérdidas, Pérdida esperada, VaR, Shortfall, …).

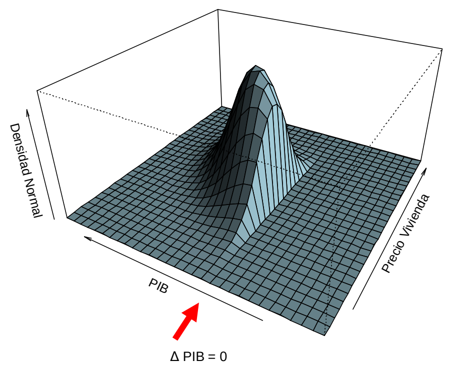
Los escenarios se pueden analizar bajo dos enfoques muy distintos:

- *Análisis de sensibilidad:* consiste en uno o más movimientos predefinidos de una variable macroeconómica dada o de un pequeño número de variables vinculadas. Normalmente, a una variable se le aplican perturbaciones simétricas (arriba y abajo), mientras que en el caso de los escenarios de estrés las perturbaciones son sólo en una dirección. Este tipo de análisis no tiene en cuenta los efectos que se producen de la interacción de la variable considerada con otras (hipótesis de *Ceteris paribus*).



Análisis de sensibilidad: Variaciones simétricas sobre el Δ PIB

- A*nálisis de escenarios*: consiste en movimientos simultáneos de varias variables macroeconómicas, reflejando un evento que pueda ocurrir en el futuro. Los escenarios se pueden construir a partir de eventos importantes experimentados en los mercados en el pasado y, eventos extremos, pero plausibles en los mercados, que no hayan pasado todavía. El análisis de escenarios tiene en cuenta las interacciones entre las variables.



Análisis de escenarios: Visualizamos cual es el escenario del Precio de la vivienda condicionado a un cierto valor del PIB.

> RDF de AIS permite el análisis de escenarios más general ya que usa escenarios con varias variables macroeconómicas. A partir de dar valores a un conjunto de estas variables en un periodo de tiempo específico del futuro, RDF computa los valores plausibles a partir de la interacción entre estas variables. Las variables se pueden fijar en todos o en algunos periodos. RDF reconstruirá el resto de periodos y variables.

Todos los escenarios se calculan mediante un único modelo general del entorno macroeconómico de tipo **VARMA** (*Vector Autoregressive Moving Average)*. Este modelo es común para todo el sistema bancario de un país y actúa a modo de generador de escenarios ya que tiene la función de proyectar a futuro los indicadores económicos seleccionados y calcular su distribución conjunta en esos periodos futuros. Los valores futuros de los indicadores económicos introducidos por el analista condicionan el modelo VARMA, generando un nuevo escenario estresado, mediante una nueva proyección de los indicadores y de su distribución. Este sistema tiene la virtud de romper con limitaciones derivadas de las hipótesis clásicas de *ceteris paribus* computando efectos directos e indirectos de escenarios hipotéticos, pero plausibles.

La dinámica que subyace en los procesos económicos proporciona información vital en la construcción de **mejores escenarios económicos** de estrés. Es así, que la integración de un sistema que incorpora las desviaciones de corto plazo de la trayectoria potencial de la economía produce distribuciones de pérdida más robustas respecto a aquellas que no incorporan el efecto del estrés macroeconómico.

EL MODELO VARMA COMO GENERADOR DE ESCENARIOS

Modelo macro económico (VARMA)

Un modelo VARMA (*Vector Autoregressive Moving Average)* es un modelo econométrico, multivariable y multiecuacional, usado para capturar la evolución y las interdependencias entre las series temporales múltiples (con varias variables). Relaciona valores pasados y presentes del vector de variables y del vector de errores. El modelo VARMA generaliza los modelos Auto Regresivos de Media Móviles (ARMA) de una sola variable.

> En RDF utilizamos el modelo VAR (Vectores Autoregresivos) para construir un modelo macroeconómico que captura las interacciones entre las variables que describen la economía de un país. Estas variables son la principal fuente de variabilidad estructural, son los *Drivers* de riesgo comunes. En este capítulo y en el siguiente se formula en detalle las distintas formulaciones de este tipo de modelo.

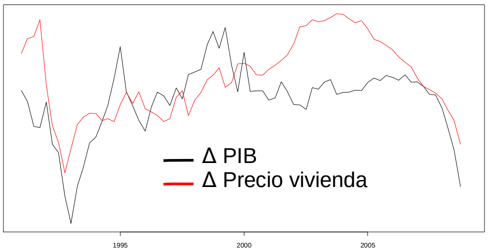
El modelo VAR que se estima para RDF se presenta de dos formas: estructural y reducida:

La **forma reducida**, presenta la parte estadística de las relaciones entre las variables donde cada variable depende sólo de los valores pasados del resto de las variables endógenas que forman el modelo. Usualmente los errores no son independientes de forma contemporánea.

El **modelo estructural** presenta las relaciones económicas causales contemporáneas donde cada variable depende además de los valores contemporáneos de las variables endógenas precedentes. Los errores son independientes a lo largo del tiempo y contemporáneamente.

Los dos formatos, reducido y estructural, son equivalentes, pero la forma en que se expresan ayuda a simplificar el proceso de estimación de proyecciones y también en la conexión con el resto del modelo de *stress* en RDF – AIS.

Para hacer **predicciones** del modelo VAR se transcribe como un modelo MA puro reducido y su equivalente estructural. A partir de la forma MA se obtiene, la esperanza y la matriz de covarianzas de las predicciones de momentos futuros. El modelo se puede expresar como una distribución multivariante única, con sus esperanzas y covarianzas a lo largo del tiempo, que nos ayudarán en este proceso de definición de escenarios macroeconómicos robustos y que permite calcular las interacciones entre las distintas variables macroeconómicas.



Ejemplo de Drivers de riesgo: El modelo VAR captura las interacciones entre el Δ PIB y Δ Precio Vivienda

Restricciones del modelo VAR

Las series temporales que forman el modelo VAR deben cumplir ciertas hipótesis:

1. Que sean estacionarias
2. Que tengan suficiente profundidad histórica
3. Que tengan relaciones coherentes desde el punto de vista económico (poder explicativo)
4. Que las relaciones entre las variables sean estables en el tiempo
5. Que sean variables explicativas de las pérdidas del sistema financiero

Para validar que el sistema no pierde eficiencia a lo largo del tiempo, debe realizarse un seguimiento y reestimación periódica de los modelos. Concretamente es conveniente revisar los siguientes aspectos:

- Que haya estabilidad de los parámetros
- Que los errores se comporten de forma normal
- Que los parámetros de los modelos no pierdan poder de predicción
- Que las previsiones e intervalos de confianza sean plausibles

DEFINICIÓN DE ESCENARIOS ECONÓMICOS DE ESTRÉS

Un escenario es una situación posible definida mediante la fijación de valores de las variables que subyacen en el modelo.

En el contexto de RDF, un escenario es un caso posible en el espacio de las situaciones económicas, definidas por los valores, en un momento del tiempo, de todas o parte de las variables macroeconómicas que soportan el modelo.

Cada escenario, definido por los valores de las variables macroeconómicas en un punto del tiempo, tiene asociada la probabilidad de obtener eventos más extremos a los valores fijados (asumiendo como media y varianza las de la escena no condicionada).

Definición de escenarios

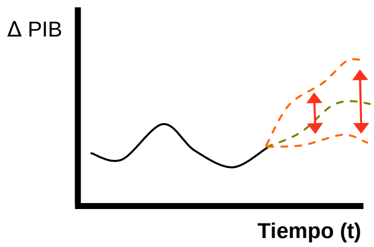
La **definición de escenarios** de estrés tiene que tomar en cuenta dos aspectos:

1) **El horizonte temporal**
2) **Las variables y los trimestres fijos**

El horizonte temporal

Las consecuencias de un cambio en las variables macroeconómicas sobre las medidas de riesgo de una entidad (pérdida esperada, capital económico, etc.) tienen que ser evaluadas durante y al final de cierto **horizonte** de tiempo.

El horizonte temporal de las escenas debe permitir que se produzca una transmisión suficiente de variabilidad procedente de la economía a las pérdidas del ciclo económico actual con el objetivo que el capital económico previsto para los próximos años (*point in time*) sea comparable al capital económico promedio del largo plazo (*through the cycle*). En distintos ejercicios realizados se ha estimado que el horizonte de 3 años es un periodo suficiente para que se aproximen ambas estimaciones y que además da suficiente tiempo a la entidad para reestructurar su cartera crediticia.



Aumento del error en las previsiones macroeconómicas: El grado de variación posible de las previsiones para el Δ PIB aumenta conforme proyectamos valores más alejados en el tiempo

Las variables y los trimestres fijos

Un escenario puede ser definido en una fecha específica fijando sólo algunas variables macroeconómicas y las varianzas de los errores de dichas variables fijadas. Además las variables se pueden fijar en todos o algunos periodos de tiempo. Esto tiene dos implicaciones:

- Las otras variables no fijadas en el escenario cambian sus distribuciones de probabilidad.
- La respuesta de las medidas de riesgo a estos cambios no es un valor único, sino una distribución.

Ejemplo de escenario:

	T-1	T-2
Δ Precio Vivienda	?	?
Δ PIB	?	- 2%

Ejemplo de fijación de una escena por trimestres: El gestor de negocio introduce unas hipótesis sobre el posible valor del ΔPIB en el trimestre 2. El sistema calcula los trimestres no informados (se presentan como interrogantes ?) de las series macroeconómicas

Para ello, procedemos de la siguiente forma en el cálculo de la distribución de los escenarios fijados:

- Dividiremos el vector de las variables macroeconómicas en dos partes, las variables que están restringidas durante un escenario y las variables que se permite variar de manera libre.
- Aplicaremos el complemento de Schur, y obtendremos la distribución Normal condicionada a escena, es decir, el vector de medias y la matriz de covarianzas condicionadas a las variables con valores fijados que definen una escena. La distribución conjunta condicionada contiene la probabilidad de todos los posibles resultados dado un escenario, no asumiendo *Ceteris Paribus*.

Posteriormente se detalla la formulación matemática de este concepto.

Tipos de escenarios de estrés

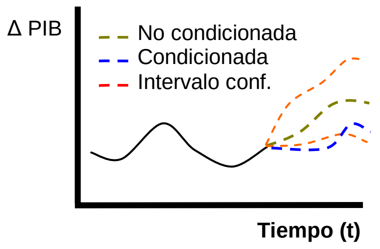
Aunque no hay una clasificación de escenarios de estrés estándar, la literatura especializada distingue entre escenarios históricos, hipotéticos y sistemáticos.

Los *escenarios históricos* son sucesos pasados, normalmente de crisis, que aunque no hayan sido capturados en el periodo de observación, podrían afectar profundamente a la entidad. La base de este tipo de análisis supone que el pasado se puede repetir. La limitación es que el futuro puede ser diferente.

Los *escenarios hipotéticos* cubren situaciones no recogidas por la historia. Se trata de diseñar sucesos posibles en el futuro que pudieran causar pérdidas importantes en la cartera de la entidad. En el caso del riesgo de crédito, por ejemplo, se podría considerar el efecto de una hipotética crisis política en un país determinado; la modificación del régimen cambiario de una divisa o la simulación de los efectos de cambios en los tipos de interés u otros precios sobre la calidad crediticia de las contrapartidas.

Los *escenarios sistemáticos* consisten en la selección de un amplio rango de escenarios que contemplen una serie de variaciones en los factores de riesgo para evaluar su impacto. A diferencia de los escenarios hipotéticos, en los que se trataría de diseñar escenarios probables, la idea subyacente sería contemplar el mayor número de escenarios posibles, independientemente de su probabilidad de ocurrencia, para determinar los principales factores de riesgo a los que está expuesta la entidad.

Bajo un enfoque mixto, se pueden usar escenarios macroeconómicos de crisis observados en períodos pasados (*escenarios históricos*), actualizando/corrigiendo aquellos factores que han sufrido cambios estructurales importantes (entrada de España al Euro,…).



Previsiones de la variable condicionada y no condicionada a escenario: Fijamos una escena para el Δ PIB con valores extremos pero plausibles (cercanos al intervalo inferior de la predicción)

RESUMEN

En este primer bloque se ha descrito cómo se construyen los **escenarios de estrés** en la metodología **RDF**. RDF (*Risk Dynamics into the Future*) es una propuesta metodológica para el análisis del impacto en la situación patrimonial de una entidad en situaciones extremas pero plausibles, generalmente resultantes de una crisis económica o de cambios económicos.

El punto de partida del RDF es la construcción de un **modelo macroeconómico** que resume los movimientos e interacciones de las variables macro de un país. Se describen al inicio del artículo las distintas formulaciones del modelo VAR (*Vector Autoregressive*) con el que se define este modelo macroeconómico.

Y posteriormente se describe cómo se utiliza éste modelo para definir escenarios macroeconómicos, pudiéndose **definir** los valores futuros de las variables que el usuario desea, dejando libre el resto. El modelo se encargará de encontrar el valor teniendo en cuenta las interacciones que existen.

En el siguiente apartado de este artículo se describe en detalle la formulación matemática de los modelos presentados.

En los siguientes artículos se explicará cómo se define en el método RDF el **cálculo de la distribución de pérdidas** condicionada a un escenario.

4 Formulación matemática de los escenarios económicos para el *stress testing*

INTRODUCCIÓN AL MODELO VAR

Un modelo VAR describe la evolución de un sistema de variables con k>=1, llamadas variables endógenas, durante el mismo período de la muestra (t = 1,…, T) como una función lineal de su evolución del pasado. Las variables se recogen en un vector Y_t de tamaño *k,* el cual contiene como i-ésimo elemento el valor de la i-ésima variable en el tiempo t.

El modelo VAR que se estima para RDF se presenta de dos formas: el modelo estructural y el reducido:

- En la **forma reducida**, cada variable depende sólo de los valores pasados del resto de las variables endógenas que forman el modelo. Usualmente los errores no son independientes de forma contemporánea.

  Un **Modelo reducido** de orden p VAR, denotado por VAR(p), es:

  $$Y_t = c + \Gamma_1 Y_{t-1} + \Gamma_2 Y_{t-2} + \ldots + \Gamma_p Y_{t-p} + E_t$$ **Ecuación 1**

  donde

  Y_t = vector de $n \times 1$ variables endógenas

  c = vector de variables sin parte aleatoria $n \times 1$

  $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_p$ = matrices $n \times n$ de coeficientes.

  E_t = vector de $n \times 1$ de términos del error.

- En el **modelo estructural**, una variable endógena depende de los valores contemporáneos de las otras variables endógenas (es decir, están correlacionadas contemporáneamente) y de sus valores pasados. Los errores son independientes a lo largo del tiempo y contemporáneamente.

  Un **Modelo estructural** VAR con p lags, denotado por SVAR(p), es:

  $$\Phi_0 Y_t = c_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$ **Ecuación 2**

  con $\Phi_0 \neq \mathit{Identidad}$ e invertible, donde

  Y_t = vector de $n \times 1$ variables endógenas

  c_0 = vector de variables sin parte aleatoria $n \times 1$

  $\Phi_0, \Phi_1,\ldots,\Phi_p$ = matrices $n \times n$ de coeficientes

  ε_t = vector de $n \times 1$ de términos del error.

MODELO REDUCIDO VAR

La **Ecuación 1** se puede escribir de otras maneras equivalentes, como por ejemplo:

$$(I_n - \Gamma_1 B - \Gamma_2 B^2 - \ldots - \Gamma_p B^p)Y_t = E_t + c$$

o **Ecuación 3**

$$\Gamma(B)Y_t = E_t + c$$

E_t = vector de errores

B = Operador de retardos

$B^S \cdot X_t = X_{t-s}$

$\Gamma(B)$ = Polinomio del operador de rezagos de Y_t

$\left(Id_n - \Gamma_1 B - \Gamma_2 B^2 - \ldots - \Gamma_p B^p\right)$

Γ_i = Matriz de parámetros autoregres ivos de dimensión nxn en el rezago i

donde los vectores de los errores, E_t, cumplen:

1. $\mathrm{E}(E_t) = 0$, cada término del error tiene esperanza cero
2. $\mathrm{E}(E_t \cdot (E_{t-k})^T) = 0$, para todo *k>0.* Esto nos dice que no hay correlación a través del tiempo; en particular, ninguna correlación serial en términos individuales del error.
3. $Cov(E_t) = \mathrm{E}(E_t \cdot (E_t)^T) = \Sigma_E$, la matriz de covarianzas contemporánea de los términos del error es una matriz positiva definida (puede ser no diagonal).

Se puede ver un ejemplo sencillo de modelo VAR reducido, de dos ecuaciones y dos variables, el incremento anual del Precio de la Vivienda (Δ PVIV) y el incremento anual del Producto interior Bruto (Δ PIB):

$$Y_t = \begin{pmatrix} \Delta PVIV_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix}$$

$$E_t = \begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{pmatrix} \approx \Omega\left(\begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma_E = \begin{pmatrix} \sigma^2_{1,1} & \sigma^2_{1,2} \\ \sigma^2_{2,1} & \sigma^2_{2,2} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Delta PVIV_t &= 0.96\Delta PVIV_{t-1} + 0.02\Delta PIB_{t-1} + E_{1t} \\ \Delta PIB_t &= 0.1\Delta PVIV_{t-1} + 0.85\Delta PIB_{t-1} + E_{2t} \end{aligned}$$

(como en la Ecuación 1)

que puede ser expresado de forma equivalente como:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} B\right)\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{pmatrix}$$

(como en la Ecuación 3)

MODELO ESTRUCTURAL SVAR

La **Ecuación 2** se puede escribir de otras maneras equivalentes, como por ejemplo:

$$(\Phi_0 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p) Y_t = \varepsilon_t + c_0$$

o bién,

Ecuación 4

$$\Phi(B) Y_t = \varepsilon_t + c_0$$

Y_t	=	Vector de variables macroeconómicas (se asume que son estacionarias)
		$Y_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \ldots, Y_{n,t})^T$
ε_t	=	Vector de errores estructurales
B	=	Operador de retardos
$\Phi(B)$	=	Polinomio del operador de rezago para Y_t
		$(\Phi_0 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p)$
Φ_i	=	Matriz de parámetros autoregresivos de dimensión nxn en el rezago *i*

donde los ε_t (choques estructurales) cumplen:

1. $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$, cada término del error tiene esperanza cero
2. $\mathrm{E}(\varepsilon_t \cdot (\varepsilon_{t-k})^T) = 0$, para todo *k>0.* Esto nos dice que no hay correlación a través del tiempo; en particular, ninguna correlación serial en términos individuales del error.
3. $Cov(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t \cdot (\varepsilon_t)^T) = \Sigma_\varepsilon$ es una matriz diagonal, esto es,

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t \cdot (\varepsilon_t)^T) = \begin{cases} \mathrm{cov}(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, los choques estructurales son incorrelacionados.

Para la identificación del modelo estructural se establece un esquema triangular inferior. La ordenación de las variables en el esquema triangular inferior se determina bajo una perspectiva económica sobre las relaciones causales contemporáneas. Una vez establecida la ordenación, se pueden estimar sus coeficientes mediante la descomposición de Cholesky. Alternativamente, se puede variar el esquema triangular inferior por otros y estimar los coeficientes estructurales mediante la minimización de la función de Verosimilitud.

Equivalencia del modelo reducido y el modelo estructural

Las dos representaciones son equivalentes y la relación entre la **ecuación 1** y la **ecuación 2** viene dada por:

$$Y_t = \Phi_0^{-1} c_0 + \Phi_0^{-1} \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_0^{-1} \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_0^{-1} \Phi_p Y_{t-p} + \Phi_0^{-1} \varepsilon_t$$ **Ecuación 5**

Si se identifica elemento a elemento tenemos que:

$$c = c_0, \Gamma_1 = \Phi_0^{-1} \Phi_1, \Gamma_2 = \Phi_0^{-1} \Phi_2, \ldots, \Gamma_p = \Phi_0^{-1} \Phi_p, E_t = \Phi_0^{-1} \varepsilon_t$$

Los errores de la forma reducida E_t son combinaciones lineales de los errores estructurales ε_t y tienen una matriz de covarianzas:

$$\Sigma_E = \mathrm{Cov}(E_t) = \mathrm{E}(E_t \cdot (E_t)^T) = \Phi_0^{-1} \mathrm{E}\left(\varepsilon_t \cdot (\varepsilon_t)^T\right)(\Phi_0^{-1})^T = \Phi_0^{-1} Cov(\varepsilon_t)(\Phi_0^{-1})^T = \Phi_0^{-1} \Sigma_\varepsilon (\Phi_0^{-1})^T$$

Ecuación 6

Como Σ_E es una matriz positiva definida (ya que es una matriz de covarianzas) entonces existe su descomposición de Cholesky, $\Sigma_E = PP^T$, con *P* matriz triangular inferior es el *Triángulo de Cholesky*.

En nuestra metodología se impone que Φ_0 sea una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal. Se define Φ_0 como:

$\Phi_0 := DP^{-1}$, donde *D* es una matriz diagonal.

Por lo tanto, se tiene, $D = diagonal(P)$.

Por otra parte, se observa,

$$\Sigma_E = \Phi_0^{-1}\Sigma_{\varepsilon}(\Phi_0^{-1})^T = PD^{-1}\Sigma_{\varepsilon}(D^{-1})^T P^T = PP^T$$
$$\Rightarrow D^{-1}\Sigma_{\varepsilon}(D^{-1})^T = Id \Leftrightarrow D = (\Sigma_{\varepsilon})^{1/2}$$

Así pues,

$$D = diagonal(P) = (\Sigma_{\varepsilon})^{1/2}$$ **Ecuación 7**

A partir de ahora se notará el modelo estructural y el modelo reducido de la siguiente forma:

SVAR(p)	VAR(p)
$\Phi(B)Y_t = \varepsilon_t + c_0$	$\Gamma(B)Y_t = E_t + c$

De forma análoga, se puede deducir del SVAR(p) el VAR(p):

Multiplicando a ambos lados de la forma estructural por: Φ_0^{-1}

$$\Phi_0^{-1}\Phi(B)Y_t = \Phi_0^{-1}\varepsilon_t + \Phi_0^{-1}c_0$$
con :
$$\Gamma(B) = \Phi_0^{-1}\Phi(B),\ E_t = \Phi_0^{-1}\varepsilon_t,\ \ c = \Phi_0^{-1}c_0$$
$$\left(\Gamma_0 - \Gamma_1 B - \Gamma_2 B^2 - ... - \Gamma_p B^p\right) = \Phi_0^{-1}\left(\Phi_0 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - ... - \Phi_p B^p\right)$$

equivalentemente

$$\Gamma_0 = I_0, \Gamma_1 = \Phi_0^{-1}\Phi_1, \Gamma_2 = \Phi_0^{-1}\Phi_2, ..., \Gamma_p = \Phi_0^{-1}\Phi_p$$
$$E_t = \Phi_0^{-1}\varepsilon_t,\ \ c = \Phi_0^{-1}c_0$$ **Ecuación 8**

y la matriz de covarianzas de los errores es: $\Sigma_E = \Phi_0^{-1}\Sigma_{\varepsilon}(\Phi_0^{-1})^T$

A continuación se muestra un ejemplo de obtención del modelo SVAR (estructural) a partir del modelo VAR (reducido).

Continuando con el modelo reducido del ejemplo anterior:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} B\right)\begin{pmatrix} \Delta PVIV_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{pmatrix}$$

y suponiendo que se tiene que $\Sigma_E = \begin{pmatrix} 3.5 \cdot 10^{-4} & 1.5 \cdot 10^{-4} \\ 1.5 \cdot 10^{-4} & 8.5 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$.

Entonces se obtiene mediante la descomposición de Cholesky de Σ_E que:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, el modelo estructural es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\text{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\text{PVIV}_{t-1} \\ \Delta PIB_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\text{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ -0.30 & 0.84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\text{PVIV}_{t-1} \\ \Delta PIB_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \text{(como en la ecuación 2)}$$

y expresado de forma equivalente:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ -0.30 & 0.84 \end{pmatrix} B\right)\begin{pmatrix} \Delta\text{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad \text{(como en la ecuación 4)}$$

y donde además se obtiene que:

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3.5\cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 7.9\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

PROYECCIÓN DEL PROCESO VAR COMO UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE

Para realizar predicciones de las variables incluidas en el modelo VAR se transcribe como un modelo MA vectorial, porque en este formato el vector de variables depende sólo de la lista del vector previo de errores del modelo.

Denotaremos:

$Y_t(l)$ = vector de variables macroeconómicas en el momento *t+l* pronosticado.

A continuación se describe como se obtiene el modelo MA reducido a partir del modelo reducido VAR. Y posteriormente como se obtiene el modelo estructural MA.

Modelo reducido MA

Sea $\Phi(\mathrm{B})\mathrm{Y}_\mathrm{t} = \varepsilon_\mathrm{t} + c_0$ el modelo estructural VAR con *p* lags entonces obtenemos el modelo reducido VAR de orden *p:*

$$\Phi_0^{-1}\Phi(B)Y_t = \Phi_0^{-1}\varepsilon_t + \Phi_0^{-1}c_0$$
$$\Gamma(B)Y_t = E_t + c$$

con

$$\Gamma(B) = \Phi_0^{-1}\left(\Phi_0 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p\right) =$$
$$= \Phi_0^{-1}\Phi_0 - \Phi_0^{-1}\Phi_1 B - \Phi_0^{-1}\Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_0^{-1}\Phi_p B^p$$
$$E_t = \Phi_0^{-1}\varepsilon_t, \quad c = \Phi_0^{-1}c_0$$

Existe $\Gamma(\mathrm{B})^{-1}$ si:

$$\det(Id - \Phi_0^{-1}\Phi_1 z - \Phi_0^{-1}\Phi_2 z^2 - ... - \Phi_0^{-1}\Phi_p z^p) \neq 0 \qquad \text{para} \, |z| \leq 1$$ **Ecuación 9**

Se asegura la existencia de $\Gamma(\mathrm{B})^{-1}$ porque las series utilizadas son no-cointegradas.

Ahora aplicando en ambos lados del modelo reducido $\Gamma(\mathrm{B})^{-1}$ se obtiene:

$$Y_t = \Gamma(B)^{-1}(E_t + c)$$

Denotamos $\Psi(\mathrm{B}) = \Gamma(B)^{-1}$, es decir, $\Gamma(B)\Psi(\mathrm{B}) = Id$, con lo que se obtiene:

$$\left(\Phi_0^{-1}\Phi_0 - \Phi_0^{-1}\Phi_1 B - ... - \Phi_0^{-1}\Phi_p B^p\right)\left(\Psi_0 + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + ... + \Psi_p B^p + ...\right) = Id$$

Ecuación 10

Identificando los coeficientes, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= Id \\
\Psi_1 &= \Phi_0^{-1}\left(\Phi_1\Psi_0\right) \\
\Psi_2 &= \Phi_0^{-1}\left(\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_0\right) \\
&... \\
\Psi_k &= \Phi_0^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}\Phi_j\Psi_{k-j}\right)
\end{aligned}$$

Y finalmente se consigue la forma reducida MA:

$$Y_t = \Psi(B)(E_t + c) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k B^k\right)(E_t + c) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k\left(E_{t-k} + c\right)\right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{0}\Psi_{-k}\left(E_{t+k} + c\right)\right)$$

Ecuación 11

Modelo estructural MA

Partiendo de la forma reducida MA:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \Gamma(B)^{-1}(E_t + c) \\
&= \Psi(\mathrm{B})(E_t + c)
\end{aligned}$$

con la que se obtiene trivialmente el modelo estructural MA, puesto que $E_t = \Phi_0^{-1}\varepsilon_t$

$$\begin{aligned}
Y_t &= \Psi(\mathrm{B})\Phi_0^{-1}(\varepsilon_t + c_0) \\
&= \Xi(\mathrm{B})(\varepsilon_t + c_0)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Xi(\mathrm{B}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\Xi_k B^k \\
&= \Psi(\mathrm{B})\Phi_0^{-1} \\
&= \Phi_0^{-1} + \Psi_1\Phi_0^{-1} + \Psi_2\Phi_0^{-1} + ..
\end{aligned}$$

es decir:

$$\Xi_0 = \Phi_0^{-1}$$
$$\Xi_k = \Psi_k \Phi_0^{-1}$$ **Ecuación 12**

Continuando con el ejemplo se va a mostrar su representación reducida MA y su representación estructural MA:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ -0.30 & 0.84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ -0.30 & 0.84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.04 \\ 0.18 & 0.72 \end{pmatrix}$$

se puede observar en este ejemplo que $\Psi_1 = \Gamma_1$, $\Psi_2 = \Gamma_1^2$,..., $\Psi_k = \Gamma_1^k$ (puesto que el modelo VAR es de orden 1).

La representación reducida MA es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.92 & 0.04 \\ 0.18 & 0.72 \end{pmatrix} + \ldots \right) \begin{pmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, la representación estructural MA es:

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0.92 & 0.04 \\ 0.18 & 0.72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} + \ldots \right) \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Proyección de la esperanza y las covarianzas de los errores

Como se ha apuntado, la representación MA puede ser utilizada para predecir los valores de las variables macroeconómicas.

Los momentos posteriores predichos al momento original *t* pronosticado del vector de variables macroeconómicas, $Y_t(l) = Y_{t+l}$, viene dado por la siguiente expresión:

$$Y_t(l) = \Psi_0 (E_{t+l} + c) + \Psi_1 (E_{t+l-1} + c) + \Psi_2 (E_{t+l-2} + c) + \ldots = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k (E_{t+l-k} + c) \right)$$
$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{l} \Psi_{l-k} (E_{t+k} + c) \right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{0} \Psi_{l-k} (E_{t+k} + c) \right) + \left(\sum_{k=1}^{l} \Psi_{l-k} (E_{t+k} + c) \right)$$

Ecuación 13

donde en el primer sumatorio están los errores desde el tiempo *t* hacia atrás, es decir, los del pasado, y en el segundo sumatorio están los errores del futuro.

A continuación se muestra la ecuación equivalente del modelo estructural de la anterior **Ecuación 13.**

$$Y_t(l) = \left(\sum_{k=-\infty}^{0} \Xi_{l-k} (\varepsilon_{t+k} + c_0) \right) + \left(\sum_{k=1}^{l} \Xi_{l-k} (\varepsilon_{t+k} + c_0) \right)$$ **Ecuación 14**

De esta forma, se puede calcular la esperanza $Y_t(l)$:

$$E(Y_t(l)) = \left(\sum_{k=-\infty}^{0}\Psi_{l-k}\mathrm{E}(E_{t+k}+c)\right)+\left(\sum_{k=1}^{l}\Psi_{l-k}\mathrm{E}(c)\right)$$
$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{0}\Xi_{l-k}\mathrm{E}(\varepsilon_{t+k}+c)\right)+\left(\sum_{k=1}^{l}\Xi_{l-k}\mathrm{E}(c)\right)$$

Ecuación 15

ya que se supone que la esperanza de los errores del futuro es nula porque es aleatoria, y los errores del pasado tienen una esperanza determinada.

Esta manera de calcular la esperanza es teórica y no se puede llevar a la práctica puesto que es un sumatorio de infinitos valores.

Así que, utilizando el modelo reducido VAR, se puede calcular también el valor esperado:

$$\mathrm{E}(Y_t(l)) = \mathrm{E}(Y_{t+l}) = \mathrm{E}((\Gamma_1 B + \ldots + \Gamma_p B^p)Y_{t+l}) + \mathrm{E}(E_t + c) =$$
$$= \Gamma_1\mathrm{E}(Y_{t+l-1}) + \ldots + \Gamma_p\mathrm{E}(Y_{t+l-p}) + \mathrm{E}(c) = \Gamma_1\mathrm{E}(Y_{t+l-1}) + \ldots + \Gamma_p\mathrm{E}(Y_{t+l-p}) + c$$

Ecuación 16

Donde: $\mathrm{E}(Y_t(j)) = Y_{t+j}$ para $j \le 0$

A continuación se muestran los primeros valores esperados a futuro:

$$\mathrm{E}(Y_t(1)) = \mathrm{E}(Y_{t+1}) = \Gamma_1 Y_t + \Gamma_2 Y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p Y_{t+1-p} + c$$
$$\mathrm{E}(Y_t(2)) = \mathrm{E}(Y_{t+2}) = \Gamma_1\mathrm{E}(Y_{t+1}) + \Gamma_2 Y_t + \ldots + \Gamma_p Y_{t+2-p} + c$$
$$\ldots$$

Seguidamente se muestra el cálculo de los primeros valores esperados a futuro del ejemplo:

Suponiendo que $\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.0036 \\ -0.048\end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{PVIV}_t(1) \\ \Delta PIB_t(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{PVIV}_t \\ \Delta PIB_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.0025 \\ -0.0404\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{PVIV}_t(2) \\ \Delta PIB_t(2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\mathrm{PVIV}_t(1) \\ \Delta PIB_t(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.0016 \\ -0.0341\end{pmatrix}$$

En consecuencia, la parte aleatoria de la relación puede ser escrita como:

$$Y_t(l) - \mathrm{E}(Y_t(l)) = \Psi_0 E_{t+l} + \Psi_1 E_{t+l-1} + \Psi_2 E_{t+l-2} + \ldots + \Psi_{l-1}E_{t+1}$$
$$= \Psi_0\Phi_0^{-1}\varepsilon_{t+l} + \Psi_1\Phi_0^{-1}\varepsilon_{t+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1}\Phi_0^{-1}\varepsilon_{t+1}$$
$$= \sum_{j=1}^{l}\Psi_{l-j}E_{t+j} = \sum_{j=1}^{l}\Xi_{l-j}\varepsilon_{t+j}$$

Ecuación 17

La matriz de covarianzas de una predicción de momentos futuros es:

$$\Sigma_{(l,l)} = \mathrm{E}\left[\left(Y_t(l) - \mathrm{E}(Y_t(l))\right)\left(Y_t(l) - \mathrm{E}(Y_t(l))\right)^T\right] = \mathrm{E}\left(E_t(l)E_t^T(l)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \Psi_{l-j}\Phi_0^{-1}\Sigma_{\varepsilon}(\Phi_0^{-1})^T\Psi_{l-j}^T = \sum_{j=1}^{l}\Xi_{l-j}\Sigma_{\varepsilon}\Xi_{l-j}^T$$

Ecuación 18

La distribución en el tiempo del vector de variables macroeconómicas es, por tanto:

$$Y_t(l) \approx \Omega_n\left(Y_t(l); \mathrm{E}(Y_t(l)), \Sigma_{(l,l)}\right)$$

Ecuación 19

El modelo de n variables x l periodos se puede expresar como una **Distribución Multivariante única**. De esta manera obtenemos el vector de las variables esperadas a lo largo del horizonte completo al igual que su correspondiente matriz de covarianzas, integrando todos los factores.

La matriz de de covarianzas para todas las variables aleatorias posibles usadas en el proceso de modelado hasta tiempo $t + l$, se calcula como:

$$\mathrm{cov}\left(Y_t(l), Y_t(l')\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\Xi_{l-j}\varepsilon_{t+j}\right)\sum_{j=1}^{l'}\left(\Xi_{l-j}\varepsilon_{t+j}\right)^T \right)$$

Bajo los supuestos de los errores estructurales:

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_{t+j}\right) = 0 \qquad si \quad j > 0$$

$$\mathrm{E}\left(\varepsilon_{t+j}(\varepsilon_{t+j'})^T\right) = \begin{cases} 0 & si \quad j \neq j' \\ \sigma_j^2 & si \quad j = j' \end{cases}$$

La matriz de covarianzas puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} \Sigma_{(l,l')} &= \mathrm{cov}\left(Y_t(l), Y_t(l')\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{j=1}^{l'}\left(\Xi_{l-j}\varepsilon_{t+j}\right)\left(\Xi_{l'-j}\varepsilon_{t+j}\right)^T \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{\min(l,l')}\Xi_{l-j}\Sigma_{\varepsilon}\Xi_{l'-j}^T \end{aligned}$$

Ecuación 20

Entonces se define:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{(1,1)} & \Sigma_{(1,2)} & \cdots & \Sigma_{(1,l-1)} & \Sigma_{(1,l)} \\ \Sigma_{(2,1)} & \Sigma_{(2,2)} & \cdots & \Sigma_{(2,l-1)} & \Sigma_{(2,l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Sigma_{(l-1,1)} & \Sigma_{(2,l-1)} & \cdots & \Sigma_{(l-1,l-1)} & \Sigma_{(l-1,l)} \\ \Sigma_{(l,1)} & \Sigma_{(2,l)} & \cdots & \Sigma_{(l,l-1)} & \Sigma_{(l,l)} \end{pmatrix}$$

Ecuación 21

A continuación se calcula la matriz de covarianzas para todas las variables aleatorias posibles usadas en el proceso de modelado hasta tiempo $t+2$ del ejemplo que se ha ido desarrollando durante esta sección:

$$\Sigma_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3.5\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 7.9\cdot10^{-4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} 3.5\cdot10^{-4} & 1.5\cdot10^{-4} \\ 1.5\cdot10^{-4} & 8.5\cdot10^{-4} \end{pmatrix} = \Sigma_E$$

$$\Sigma_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3.5\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 7.9\cdot10^{-4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} 3.4\cdot10^{-4} & 1.6\cdot10^{-4} \\ 1.6\cdot10^{-4} & 7.4\cdot10^{-4} \end{pmatrix} = \Sigma_E \Psi_1^T$$

$$\Sigma_{(2,1)} = \Sigma_{(1,2)}^T$$

$$\Sigma_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3.5\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 7.9\cdot10^{-4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0.96 & 0.02 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3.5\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 7.9\cdot10^{-4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.42 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} 6.9\cdot10^{-4} & 3.2\cdot10^{-4} \\ 3.2\cdot10^{-4} & 1.48\cdot10^{-3} \end{pmatrix} = \Psi_1 \Sigma_E \Psi_1^T + \Sigma_E$$

Por tanto se tiene que la matriz de covarianzas es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3.5\cdot10^{-4} & 1.5\cdot10^{-4} & 3.4\cdot10^{-4} & 1.6\cdot10^{-4} \\ 1.5\cdot10^{-4} & 8.5\cdot10^{-4} & 1.6\cdot10^{-4} & 7.4\cdot10^{-4} \\ 3.4\cdot10^{-4} & 1.6\cdot10^{-4} & 6.9\cdot10^{-4} & 3.2\cdot10^{-4} \\ 1.6\cdot10^{-4} & 7.4\cdot10^{-4} & 3.2\cdot10^{-4} & 1.48\cdot10^{-3} \end{pmatrix}$$

El complemento de Schur para la definición de escenarios de estrés

Escenario económico No Condicionado

Definimos el vector de variables macroeconómicas a l periodos vista, en dos partes:

$$Y_t(l) = \begin{pmatrix} Y_{1,t,(l)} \\ Y_{2,t,(l)} \end{pmatrix}$$

$Y_{1,t,(l)}$ Vector de r variables que se mueven de manera libre

$Y_{2,t,(l)}$ Vector de s variables macroeconómicas que son fijas y son usadas para definir posteriormente los escenarios

$\Sigma_{ij,t,(l)}$ Sub - matriz de correlaciones de los vectores i , j con $i,,j \in \{1,2\}$

La función de distribución para este vector está dada por:

$$\begin{pmatrix} Y_{1,t,(l)} \\ Y_{2,t,(l)} \end{pmatrix} \approx \Omega_n \left(\begin{pmatrix} Y_{1,t,(l)} \\ Y_{2,t,(l)} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \overline{Y}_{1,t,(l)} \\ \overline{Y}_{2,t,(l)} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11,t,(l)} & \Sigma_{12,t,(l)} \\ \Sigma_{21,t,(l)} & \Sigma_{22,t,(l)} \end{pmatrix} \right)$$

donde Σ se ve definida en la **Ecuación 20**.

Escenario económico Condicionado

Después de fijar $Y_2 = Y_2^{\ *}$ y

$$\Sigma_{Y_2^*} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(Y_{1,2}^{\ *}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{var}(Y_{2,2}^{\ *}) & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \mathrm{var}(Y_{S-1,2}^{\ *}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{var}(Y_{S,2}^{\ *}) \end{pmatrix},$$

estamos definiendo una escena. Aplicando el ***complemento de Schur***, la distribución marginal que resulta, será aún **normal** con:

$$E\left(Y_{1,t,(l)} \mid Y_{2,t,(l)} = Y^*_{2,t,(l)}\right) = \overline{Y}_{1,t,(l)} + \Sigma_{12,t,(l)}\Sigma^{-1}_{22,t,(l)}\left(Y^*_{2,t,(l)} - \overline{Y}_{2,t,(l)}\right)$$
$$\Sigma\left(Y_{1,t,(l)} \mid Y_{2,t,(l)} = Y^*_{2,t,(l)}\right) = \Sigma_{11,t,(l)} - \Sigma_{12,t,(l)}\Sigma^{-1}_{22,t,(l)}\Sigma_{21,t,(l)}$$

De este modo se tiene que:

$$Y_t(l) \mid Y_{2,t,(l)} = Y^*_{2,t,(l)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y_{1,t,(l)} \\ Y_{2,t,(l)} \end{pmatrix} \mid Y_{2,t,(l)} = Y^*_{2,t,(l)}$$
$$\approx \Omega\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \overline{Y}_{1,t,(l)} + \Sigma_{12,t,(l)} \cdot \Sigma^{-1}_{22,t,(l)} \cdot \left(Y^*_{2,t,(l)} - \overline{Y}_{2,t,(l)}\right) \\ Y^*_{2,t,(l)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11,t,(l)} - \Sigma_{12,t,(l)} \cdot \Sigma^{-1}_{22,t,(l)} \cdot \Sigma_{21,t,(l)} & 0 \\ 0 & \Sigma_{Y_2^*} \end{pmatrix}\right)$$

Con el **complemento de Schur** obtenemos la **distribución Normal condicionada a escena**, es decir, el vector de medias y la matriz de covarianzas condicionada a las variables con valores fijados que definen una escena. La distribución conjunta condicionada contiene la probabilidad de todos los posibles resultados dado un escenario, no asumiendo *Ceteris Paribus*.

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se obtiene la distribución Normal condicionada a la siguiente escena:

Medias	T-1	T-2
Δ Pecio Vivienda	?	?
Δ PIB	?	- 2%

Y también fijamos un valor para su varianza:

Varianzas	T-1	T-2
Δ Pecio Vivienda	?	?
Δ PIB	?	0.0005

Se recuerda que:

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t(1) \\ \Delta PIB_t(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0025 \\ \text{-}\,0.0404 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E}\begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t(2) \\ \Delta PIB_t(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0016 \\ \text{-}\,0.0341 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3.5{\cdot}10^{-4} & 1.5{\cdot}10^{-4} & 3.4{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 1.5{\cdot}10^{-4} & 8.5{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} & 7.4{\cdot}10^{-4} \\ 3.4{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} & 6.9{\cdot}10^{-4} & 3.2{\cdot}10^{-4} \\ 1.6{\cdot}10^{-4} & 7.4{\cdot}10^{-4} & 3.2{\cdot}10^{-4} & 1.48{\cdot}10^{-3} \end{pmatrix}$$

Se expresa $Y_t(2) = \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t(1) \\ \Delta PIB_t(1) \\ \Delta \mathrm{PVIV}_t(2) \\ \Delta PIB_t(2) \end{pmatrix}$ donde:

$$Y_{1,t}(2) = \begin{pmatrix} \Delta \mathrm{PVIV}_t(1) \\ \Delta PIB_t(1) \\ \Delta \mathrm{PVIV}_t(2) \end{pmatrix}, \quad Y_{2,t}(2) = \left(\Delta PIB_t(2)\right), \quad \Sigma_{11,t,(l)} = \begin{pmatrix} 3.5{\cdot}10^{-4} & 1.5{\cdot}10^{-4} & 3.4{\cdot}10^{-4} \\ 1.5{\cdot}10^{-4} & 8.5{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 3.4{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} & 6.9{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{12,t,(l)} = \begin{pmatrix} 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 7.4{\cdot}10^{-4} \\ 3.2{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{21,t,(l)} = \Sigma_{12,t,(l)}^T \text{ y } \quad \Sigma_{22,t,(l)} = \left(1.48{\cdot}10^{-3}\right).$$

Ahora aplicando el *complemento de Schur* se obtiene:

$$E\left(Y_{1,t,(l)} \mid Y_{2,t,(l)} = -0.02\right) = \begin{pmatrix} 0.0025 \\ \text{-}\,0.0404 \\ 0.0016 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 7.4{\cdot}10^{-4} \\ 3.2{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix} \left(1.48{\cdot}10^{-3}\right)^{-1} \left(-\,0.02 - (\text{-}0.0341)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0040 \\ \text{-}\,0.0335 \\ 0.0046 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma\left(Y_{1,t,(l)} \mid Y_{2,t,(l)} = -0.02\right) = \begin{pmatrix} 3.5{\cdot}10^{-4} & 1.5{\cdot}10^{-4} & 3.4{\cdot}10^{-4} \\ 1.5{\cdot}10^{-4} & 8.5{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 3.4{\cdot}10^{-4} & 1.6{\cdot}10^{-4} & 6.9{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 7.4{\cdot}10^{-4} \\ 3.2{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix} \left(1.48{\cdot}10^{-3}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1.6{\cdot}10^{-4} \\ 7.4{\cdot}10^{-4} \\ 3.2{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 3.4{\cdot}10^{-4} & 7{\cdot}10^{-5} & 3.1{\cdot}10^{-4} \\ 7{\cdot}10^{-5} & 4.9{\cdot}10^{-4} & 2.6{\cdot}10^{-6} \\ 3.1{\cdot}10^{-4} & 2.6{\cdot}10^{-6} & 6.2{\cdot}10^{-4} \end{pmatrix}$$

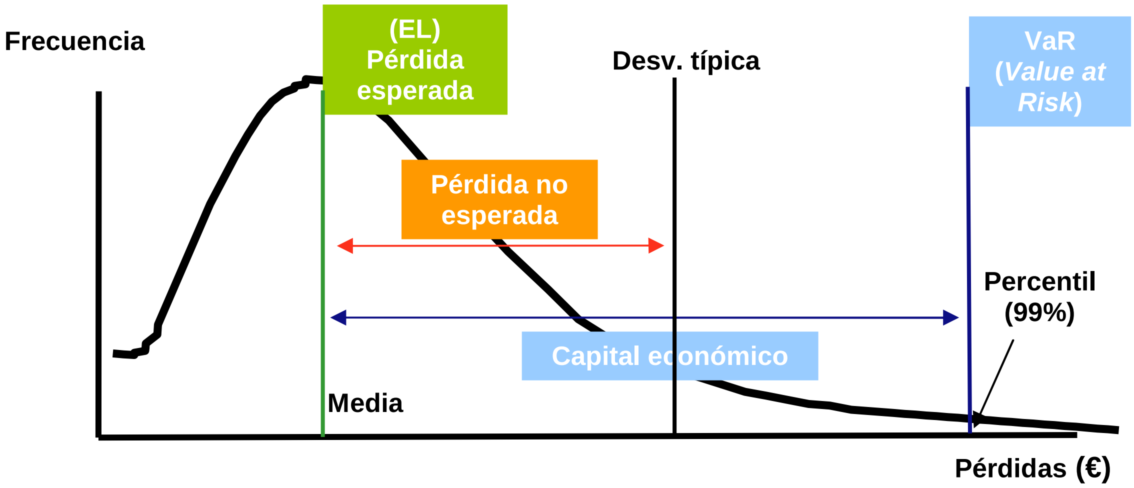
Por tanto,

$$Y_t(l) \mid Y_{2,t,(2)} = -0.02 \approx \Omega\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0.0040 \\ -0.0335 \\ 0.0046 \\ -0.02 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.4 \cdot 10^{-4} & 7 \cdot 10^{-5} & 3.1 \cdot 10^{-4} & \\ 7 \cdot 10^{-5} & 4.9 \cdot 10^{-4} & 2.6 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 3.1 \cdot 10^{-4} & 2.6 \cdot 10^{-6} & 6.2 \cdot 10^{-4} & \\ & 0 & & 0.0005 \end{pmatrix}\right)$$

5 Glosario

AR Modelo (Autoregressive Model): Los modelos AR se utilizan para modelizar series temporales según la metodología de Box&Jenkins, y son aquellos modelos ARMA(p,q) en los que q=0. En general, se denotan por AR(p). En un modelo AR(p) el valor de la serie en el momento t se expresa como una combinación lineal de las p observaciones anteriores de la serie más el error.

Capital Económico: Es el nivel de capital por encima de la pérdida esperada que una entidad financiera debería tener para garantizar su solvencia. Se suele expresar como la diferencia entre el VaR y la pérdida esperada.



Complemento de Schur: Suponemos los vectores columna X, Y en el espacio R^n y R^m respectivamente, y el el vector (X, Y) en el espacio R^{n+m} tiene una distribución normal multivariante cuya variancia es la matriz simétrica definida positiva:

$$V = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

Entonces la variancia condicional de X dada Y es el complemento de Schur de C en V:

$$\operatorname{var}(X \mid Y) = A - BC^{-1}B^T$$

Distribución de pérdidas: Indica la probabilidad de que se incurra en un nivel de pérdidas dado.

EAD (Exposure at Default / exposición en caso de impago): Es el importe total estimado en el momento del incumplimiento de un crédito o préstamo.

Expected Shortfall: se define como el valor esperado de las pérdidas más allá de un percentil especificado de la distribución. Midiendo el área bajo la cola de la distribución, el *expected shortfall* proporciona una buena medida de las pérdidas extremas que pudieran ocurrir.

Función de pérdidas: Cuantifica el nivel de pérdidas para el siguiente año. Habitualmente no se trata directamente esta función, si no, su distribución y otros estadísticos de resumen.

LGD (Losses Given Default / Severidad de las pérdidas): Es el porcentaje de pérdidas en caso de incumplimiento de un crédito o préstamo. Se mide como una proporción de la exposición. Representa el costo neto del incumplimiento del deudor, es decir, la parte no recuperada al incumplir una vez tomados en cuenta todos los costos implicados en dicha recuperación.

MA (Moving Average Model): Los modelos MA se utilizan para modelizar series temporales según la metodología de Box&Jenkins y son aquellos modelos ARMA(p,q) en los que p=0. En general, se denotan por MA(q). En un modelo MA(q) el valor de la serie en el momento t se expresa como una combinación lineal de los errores.

Pérdida Esperada. Es la media de la distribución de pérdidas y ganancias, es decir, indica cuánto se puede perder en promedio y normalmente está asociada a la política de reservas preventivas que la institución debe tener contra riesgos crediticios. Se estima como el producto de la probabilidad de incumplimiento (PD), la exposición (EAD) y la pérdida dado incumplimiento (LGD) de deudores.

Pérdida No Esperada. Es la pérdida por encima de la esperada, medida como el VaR – PE, en que puede incurrir el acreedor, por incumplimiento de sus deudores. Se puede expresar como un múltiplo de la desviación estándar de la distribución de probabilidades de pérdidas y ganancias. Estas pérdidas determinan el capital económico requerido por el acreedor para hacer frente a pérdidas no anticipadas.

PD (Probabilidad de Default / Probabilidad de incumplimiento). Es la probabilidad de que una operación de la cartera caiga en incumplimiento, en un plazo de un año, es decir, los incumplimientos totales por cada cliente "sano", medidos en función de la vida equivalente aportada.

Stress testing (pruebas de tensión): designa las diversas técnicas para evaluar la vulnerabilidad a eventos excepcionales y posibles en un horizonte verosímil para las instituciones financieras. El *stress testing* consiste en especificar una serie de escenarios de movimientos extremos pero plausibles en el entorno macroeconómico que puedan afectar el riesgo de una cartera y, después, analizar el comportamiento esperado de la cartera con respeto a estos escenarios.

Valor a Riesgo (VaR): Es un nivel de pérdidas tal que la probabilidad “α” de que la pérdida exceda esta cantidad en un periodo de tiempo corresponda a un cierto nivel de confianza escogido por el analista. Así, el analista fija de antemano el nivel de confianza con el que quiere trabajar y el periodo de tiempo en el que puede ocurrir la pérdida de los activos financieros a los que se les quiera medir su riesgo. A partir de estos dos parámetros, el VaR se corresponde con el percentil asociado al nivel de confianza fijado, de la distribución de probabilidades de pérdidas en el horizonte de tiempo dado, considerando las condiciones de incertidumbre del mercado.

6 Bibliografía

Ballabriga F., *"Un modelo macroeconométrico BVAR para la economía española: metodología y resultados",* Banco de España, Servicio de Estudios, 1998

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. *"Time Series Analysis, Forecasting and Control"*.
San Francisco: Holden-Day, 1976.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C.. *"Time Series Analysis, Forecasting and Control"*, 2nd ed. New York: Prentice-Hall, 1994

Committee of European Banking Supervisors (CEBS), *"Consultation Paper 12 (CP12) on Stress testing under the Supervisory Review Process", 2006*

Committee on the Global Financial System, *"Stress testing at major financial institutions: survey results and practice",* Bank for International Settlements ,2005

Cryer, J. D., Chan, Kung Sick, "*Time Series Analysis, With Applications in R*"
Second Edition, Springer, 2008

Estrada A., Fernández, J.L., Moral, E., Regil, A., *"A quarterly macroeconometric model of the spanish economy",* Servicio de Estudios del Banco de España, 2004

Kayser, R., Maravall, A., *"Notes on time series analysis arima models and signal extraction",* Banco de España, Servicio de Estudios

International Monetary Fund, *"Spain: Financial Sector Assessment Program—Technical Note—Stress Testing Methodology and Results", 2006*

LÄutkepohl H**.,** *"Forecasting with VARMA Models",* Departament of Economics, European University Institute, 2004

Pfaff Bernhard, *"Analysis of Integrated Series with R",* Springer, 2008

Shumway, Robert H., Stoffer, David S., *"Time Series Analysis and Its Applications With R Examples",* Second Edition, Springer, 2006

Sorge, M., "Stress-testing financial systems: an overview of current methodologies", Bank for International Settlements, 2004

Tiao, G. C., Box, G. E.P., "*Modeling Multiple Time Series with Applications*", 1981